均衡問題と制約可能性問題に関する強収束定理 (非線形解析学と凸解析学の研究)

茨木, 貴徳

数理解析研究所講究録
第 1755 巻 2011 年 38-45

均衡問題と制約可能性問題に関する強収束定理
(STRONG CONVERGENCE THEOREMS FOR QUILIBRIUM PROBLEMS AND FEASIBILITY PROBLEMS)

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)
名古屋大学情報連携統括本部
(INFORMATION AND COMMUNICATIONS HEADQUARTERS, NAGOYA UNIVERSITY)

1. はじめに

C を実ヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, T を C から C への非拡大写像 (nonexpansive mapping), すなわち, 任意の C の元 x, y に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

が成り立つとする. このとき, T の不動点 (fixed point) 全体の集合を $F(T)$ で表すこととする. 中條-高橋 [19] は Solodov-Svaiter [20] にヒントを得て, 非拡大写像の不動点を求める次の点列近似法を提案した.

$$\begin{cases} x_1 = x \in C \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ H_n = \{z \in C : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ W_n = \{z \in C : \langle x - x_n, x_n - z\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n} x, \ n = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ とする. そして彼らは, この点列 $\{x_n\}$ が $P_{F(T)}x$ に強収束することを示した. ただし, P_K は C から C の空でない閉凸部分集合 K の上への距離射影である. この手法はハイブリッド法 (hybrid method) と呼ばれている. 2008 年には高橋-竹内-窪田 [24] が中條-高橋 [19] にヒントを得て非拡大写像の不動点を求める次の点列近似法を提案した.

$$\begin{cases} x_0 = x \in H, \ Q_1 = C \ \& \ x_1 = P_{Q_1} x_0 \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ Q_{n+1} = \{z \in Q_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{Q_{n+1}} x, \ n = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ とする. そして彼らは, この点列 $\{x_n\}$ が $P_{F(T)}x$ に強収束することを示した. ただし, P_K は C から C の空でない閉凸部分集合 K の上への距離射影である. この手法は縮小射影法 (shrinking projection method) と呼ばれている.

これら 2 つの手法には, 距離射影の概念が重要となってくる. ここで, H から C の上への距離射影 (metric projection) P_C とは, 任意の H の 元 x に対して次で定義される.

$$P_C x = \operatorname*{argmin}_{y \in C} \|x - y\|.$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47H09, Secondary 47H10, 47J25.
Key words and phrases. 準非拡大写像, サニー準非拡大射影, ハイブリッド法, 縮小射影法, 均衡問題, 制約可能性問題.

この距離射影は次の重要な性質を持っている. すなわち H の元 x と C の元 x_0 に対して, $x_0 = P_C x$ であることの必要十分条件は, 任意の C の元 y に対して

$$\langle x - x_0, x_0 - y \rangle \geq 0 \tag{1.1}$$

が成り立つことである. この性質を用いると P_C が非拡大写像になることがわかる.

一方, 距離射影の概念はバナッハ空間の場合にも拡張される. バナッハ空間での距離射影 (metric projection) とサニー非拡大射影 (sunny nonexpansive retraction) の2つの射影は古くから知られていた. 1996年に Alber [2] は第3の射影である準距離射影 (generalized projection) の概念を導入した. さらに近年, 茨木-高橋 [6,7] は第4の射影であるサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) の概念を導入した. これらバナッハ空間の非線形射影は, ヒルベルト空間と同様にそれぞれ非拡大の性質を持っていることも知られている ([5,22,23] を参照). これらの非拡大型写像の不動点問題は, 凸最小化問題, 制約可能性問題, 均衡問題等の非線形問題と密接な関わりを持っており, これまで様々な研究が行われてきた ([5,8,10,16–18,22,23] 等を参照).

本論文では, バナッハ空間の非線形射影であるサニー準非拡大射影及び関連する非拡大型写像である準非拡大写像に関して議論する. 初めに, サニー準非拡大射影によるハイブリッド法及び縮小射影法を利用し, 準非拡大写像の不動点近似法を議論する. 次に, この結果を利用して均衡問題と制約可能性問題の解への近似法を議論する.

2. 準備

E を実バナッハ空間とし, E^* をその共役空間とする. E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $\|x\| = \|y\| = 1$ となる E の元 x, y $(x \neq y)$ に対して, つねに $\|x + y\| < 2$ が成り立つことである. 同様に, 一様凸 (uniformly convex) であるとは, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ となる E の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して, つねに $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ となることである.

バナッハ空間 E の元 x に対して, E^* の部分集合

$$Jx := \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像 J のことを, E の双対写像 (duality mapping) と呼ぶ.

この双対写像 J は E のノルムの微分可能性とも大いに関わりをもつ. いま $S(E) := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, $S(E)$ の元 x, y に対して, 次の極限を考える.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

バナッハ空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能 (Gâteaux differentiable) であるとは, $S(E)$ の元 x, y に対して, つねに (2.1) が存在するときをいう. このとき, 空間 E は滑らか (smooth) であるともいう. 任意の $S(E)$ の元 y に対して, (2.1) が $S(E)$ の元 x に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能 (uniformly Gâteaux differentiable) であるという. 任意の $S(E)$ の元 x に対して, (2.1) が $S(E)$ の元 y に関して一様に収束するとき, E のノルムが Fréchet 微分可能 (Fréchet differentiable) であるという. (2.1) が $S(E)$ の元 x, y に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Fréchet 微分可能 (uniformly Fréchet differentiable) であるという. このとき, 空間 E は一様に滑らか (uniformly smooth) であるともいう.

バナッハ空間 E での双対写像 J とノルムの微分可能性に関しては次の性質が知られている ([4,22,23] を参照).

(1) E の元 x に対して, Jx は空でない有界な閉凸集合である;

(2) 任意の $x, y \in E$, $x^* \in Jx$, $y^* \in Jy$ に対して,

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0;$$

(3) E が狭義凸であるための必要十分条件は, J が1対1となることである.
すなわち, $x \neq y \;\Rightarrow\; Jx \cap Jy = \emptyset$;

(4) E が狭義凸であるための必要十分条件は, 任意の $x, y \in E(x \neq y)$, $x^* \in Jx$, $y^* \in Jy$ に対して,

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle > 0;$$

(5) E が回帰的で滑らかで狭義凸なバナッハ空間なら, E^* の双対写像 J_* は J の逆像となる. すなわち, $J_* = J^{-1}$ である;
(6) E が回帰的であるための必要十分条件は, J が全射となることである;
(7) E が滑らかであるための必要十分条件は, J が一価になることである.

3. 準非拡大写像と強収束定理

E を滑らかなバナッハ空間とし, J を E の双対写像とする. このとき, E の元 x, y に対して,

$$V(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$$

で $E \times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を定義する. この関数 V に関しては次のような性質が知られている ([2,13,18] を参照).

(1) E の元 x, y に対して, $(\|x\| - \|y\|)^2 \leq V(x, y) \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ である;
(2) E の元 x, y, z に対して, $V(x, y) = V(x, z) + V(z, y) + 2\langle x - z, Jz - Jy \rangle$ である;
(3) E が狭義凸ならば, E の元 x, y に対して $V(x, y) = 0$ であるための必要十分条件は $x = y$ である.

C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, C から C への写像 T が準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping) であるとは, $F(T)$ が空集合でなく, かつ任意の C の元 x と $F(T)$ の元 y に対して,

$$V(Tx, y) \leq V(x, y)$$

がつねに成り立つことと定義する ([6,7] を参照). ただし, $F(T)$ は写像 T の不動点の集合, すなわち $F(T) = \{z \in C : Tz = z\}$ である. C の元 p が T の 準漸近的不動点 (generalized asymptotic fixed point) であるとは, Jx_n が Jp に弱 * 位相の意味で収束し $\lim_{n\to\infty}(Jx_n - JTx_n) = 0$ を満たす点列 $\{x_n\} \subset C$ が存在することと定義する. このとき, T の準漸近的不動点の集合を $\check{F}(T)$ で表す. 準非拡大写像の準漸近的不動点に関しては次の補助定理が知られている.

補助定理 3.1 ([10,17]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, C から C への写像 T を非拡大写像で $F(T)$ が空集合でないとする. このとき, T は準非拡大写像かつ $F(T) = \check{F}(T)$ となる.

E をバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき, E から D への写像 R がサニー (sunny) であるとは, 任意の E の元 x と $t \geq 0$ に対して

$$R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$$

が成り立つことである. 同様に, E から D への写像 R が射影 (retraction) であるとは, 任意の D の元 x に対して, $Rx = x$ が成り立つことである. これらの写像に関して次の補助定理が知られている.

補助定理 3.2 ([6,7]). E を滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. また R_D を E から D の上への射影とする. このとき, R_D がサニーかつ準非拡大写像になる必要十分条件は, 任意の E の元 x と D の元 y に対して,

$$\langle x - R_D x, JR_D x - Jy \rangle \geq 0$$

となることである. ただし, J は E の双対写像である.

E が滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を空でない集合とする. このとき, E から D の上へのサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) は一意に決まる. そこで, 滑らかで狭義凸なバナッハ空間の場合に, E から D の上へのサニー準非拡大射影を R_D で表すことにする. D を E の空でない集合とする. このとき, D が E のサニー準非拡大レトラクト (sunny generalized nonexpansive retract) であるとは, E から D の上へのサニー準非拡大射影が存在するときと定義する. サニー準非拡大射影の不動点集合はもちろん D である ([6,7] を参照). サニー準非拡大射影とサニー準非拡大レトラクトに関しては次の2つの結果が知られている.

定理 3.3 ([15]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき次の条件は同値になる.

(1) D は E のサニー準非拡大レトラクトである;
(2) JD は閉凸集合である.

このとき, D は閉集合となる.

補助定理 3.4 ([10]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でないサニー準非拡大レトラクトとする. また R_D を E から D の上へのサニー準非拡大射影とする. このとき, $\check{F}(R) = F(R) = D$ が成り立つ.

次に, ハイブリッド法と縮小射影法を用いた準非拡大写像の不動点への強収束定理を議論する. それには, 準非拡大写像の不動点集合に関して次の補助定理が必要である.

補助定理 3.5 ([10]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, T を E から E への準非拡大写像とする. このとき, $F(T)$ は E のサニー準非拡大レトラクトになる.

茨木-高橋 [10] はハイブリッド法を利用した準非拡大写像の不動点への強収束定理を得た.

定理 3.6 ([10]). E を一様に滑らかで一様凸バナッハ空間とし, T を E から E への準非拡大写像で, $\check{F}(T) = F(T)$ を満たすものとする. このとき, $x_1 = x \in E$ とし

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ H_n = \{z \in E : V(y_n, z) \le V(x_n, z)\}, \\ W_n = \{z \in E : \langle x_1 - x_n, Jx_n - Jz \rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = R_{H_n \cap W_n} x, \ n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ を満たすとする. このとき点列 $\{x_n\}$ は $R_{F(T)}x$ に強収束する. ただし, P_D は E から E の空でないサニー準非拡大レトラクト D の上へのサニー準非拡大射影である.

次に, 茨木-高橋 [12] は縮小射影法を利用した準非拡大写像の不動点への強収束定理も得た.

定理 3.7 ([12]). E を一様に滑らかで一様凸バナッハ空間とし, T を E から E への準非拡大写像で, $\check{F}(T) = F(T)$ を満たすものとする. このとき, $x_1 = x \in E$, $Q_1 = E$ とし

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ Q_{n+1} = \{z \in Q_n : V(y_n, z) \le V(x_n, z)\}, \\ x_{n+1} = R_{Q_{n+1}} x, \ n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) > 0$ を満たすとする. このとき点列 $\{x_n\}$ は $R_{F(T)}x$ に強収束する. ただし, P_D は E から E の空でないサニー準非拡大レトラクト D の上へのサニー準非拡大射影である.

4. 均衡問題

本節では, 実バナッハ空間上での均衡問題を考察する. E を実バナッハ空間とし, E^* をその共役空間とする. C を JC が閉凸集合となるような空でない E の閉部分集合とし, f^* を $JC \times JC$ 上で定義された実数値関数とする. このとき, 任意の C の元 y に対して

$$f^*(Jx_0, Jy) \geq 0$$

を満たす元 x_0 を求める問題を, f^* に関する均衡問題 (equilibrium problem) という. このとき, x_0 をこの問題の解といい, 解の集合を $EP(f^*)$ で表す. (詳細は [25] を参照). この均衡問題を解くために, f^* に次の条件を仮定することが多い:

(A1) 任意の JC の元 x^* に対して, $f^*(x^*, x^*) = 0$ が成り立つ;
(A2) 任意の JC の元 x^*, y^* に対し $f^*(x^*, y^*) + f(y^*, x^*) \leq 0$ が成り立つ;
(A3) 任意の JC の元 x^*, y^*, z^* に対して,

$$\limsup_{t \downarrow 0} f^*(tz^* + (1-t)x^*, y^*) \leq f^*(x^*, y^*);$$

(A4) 任意の JC の元 x^* に対して, $f(x^*, \cdot)$ は下半連続な凸関数である.

このような実数値関数 f^* と均衡問題に関して次のような補助定理が知られている.

補助定理 4.1 ([3]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を JC が閉凸集合となるような E の空でない閉部分集合とする. f^* を (A1) から (A4) を満たす $JC \times JC$ 上で定義された実数値関数とする. このとき, 任意の $r > 0$ と E の元 x に対して, E の元 z が存在して, 任意の C の元 y に対して

$$f^*(Jz, Jy) + \frac{1}{r}\langle z - x, Jy - Jz \rangle \geq 0$$

となる.

補助定理 4.2 ([25]). E を一様に滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を JC が閉凸集合となるような E の空でない閉部分集合とする. f^* を (A1) から (A4) を満たす $JC \times JC$ 上で定義された実数値関数とする. 任意の $r > 0$ と E の元 x に対して

$$F_r(x) = \left\{ z \in C : f^*(Jz, Jy) + \frac{1}{r}\langle z - x, Jy - Jz \rangle \geq 0 \text{ for all } y \in C \right\} \tag{4.1}$$

とする. このとき, 写像 $F_r : E \to C$ は以下を満たす.

(1) F_r は一価写像である;
(2) 任意の E の元 x, y に対して,

$$\langle F_r x - F_r y, JF_r x - JF_r y \rangle \leq \langle x - y, JF_r x - JF_r y \rangle;$$

(3) $F(F_r) = EP(f^*)$;
(4) $JEP(f^*)$ は閉凸集合である.

補助定理 4.3 ([25]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を JC が閉凸集合となるような E の空でない閉部分集合とする. f^* を (A1) から (A4) を満たす $JC \times JC$ 上で定義された実数値関数とする. $r > 0$ とし, F_r を (4.1) で定義された写像とする. もし, $EP(f^*)$ が空でないとすると F_r は準非拡大写像となる.

補助定理 4.4 ([11]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を JC が閉凸集合となるような E の空でない閉部分集合とする. f^* を (A1) から (A4) を満たす $JC \times JC$ 上で定義された実数値関数とする. $r > 0$ とし, F_r を (4.1) で定義された写像とする. このとき, $\hat{F}(F_r) = F(F_r)$ である.

補助定理 4.3 及び 4.4 と 定理3.6 及び 3.7 の直接的な結果として, 均衡問題に関する次の2つの強収束定理を得ることができる.

定理 4.5 ([11]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を JC が閉凸集合となるような E の空でない閉部分集合とする. f^* を $(A1)$ から $(A4)$ を満たす $JC \times JC$ 上で定義された実数値関数とする. $r > 0$ とし, F_r を (4.1) で定義された写像とする. このとき, $x_1 = x \in E$ とし

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)F_r x_n, \\ H_n = \{z \in E : V(y_n, z) \le V(x_n, z)\}, \\ W_n = \{z \in E : \langle x_1 - x_n, Jx_n - Jz\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = R_{H_n \cap W_n} x, \ n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ を満たすとする. このとき $EP(f^*) \neq \emptyset$ であれば, 点列 $\{x_n\}$ は $R_{EP(f^*)}x$ に強収束する. ただし, P_D は E から E の空でないサニー準非拡大レトラクト D の上へのサニー準非拡大射影である.

定理 4.6 ([11]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を JC が閉凸集合となるような E の空でない閉部分集合とする. f^* を $(A1)$ から $(A4)$ を満たす $JC \times JC$ 上で定義された実数値関数とする. $r > 0$ とし, F_r を (4.1) で定義された写像とする. このとき, $x_1 = x \in E$, $Q_1 = E$ とし

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)F_r x_n, \\ Q_{n+1} = \{z \in Q_n : V(y_n, z) \le V(x_n, z)\}, \\ x_{n+1} = R_{Q_{n+1}} x, \ n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

とする. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) > 0$ を満たすとする. このとき $EP(f^*) \neq \emptyset$ であれば, 点列 $\{x_n\}$ は $R_{EP(f^*)}x$ に強収束する. ただし, P_D は E から E の空でないサニー準非拡大レトラクト D の上へのサニー準非拡大射影である.

5. 制約可能性問題

H を実ヒルベルト空間とし, $\{C_i\}_{i=1}^r$ を H の空でない閉凸集合の族で $C_0 = \cap_{i=1}^r C_i$ が空集合でないとする. このとき, 制約可能性問題 (feasibility problem) とは H から C_i の上への距離射影 P_{C_i} $(i = 1, 2, \dots, r)$ のみを用いた点列近似法で C_0 の元 z を求める問題である. 本節では, ヒルベルト空間の距離射影のバナッハ空間への拡張であるサニー準非拡大射影を用いた制約可能性問題を議論する. ここでは, 有限個の写像の凸結合から生成されるブロック写像と呼ばれる写像を用いた点列近似法を扱う.

Aharoni-Censor [1] は有限個の非拡大写像の共通不動点を求めるために有限個の写像の凸結合からなるブロック写像 (block mapping) という写像を導入した; C をバナッハ空間 E の空でない凸集合とし, $\{T_i\}_{i=1}^r$ を C から C への r 個の写像とし, $\{\alpha_i\}_{i=1}^r$ 及び $\{\omega_i\}_{i=1}^r$ を r 個の実数で $\sum_{i=1}^r \omega_i = 1$ 及び $0 \le \alpha_i, \omega_i \le 1$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ を満たものとする. このとき, C から C への写像 U を

$$U = \sum_{i=1}^{r} \omega_i \Big(\alpha_i I + (1-\alpha_i) T_i \Big) \tag{5.1}$$

で定義する ([1,8,14,16] を参照). このような写像 U は, $\{T_i\}_{i=1}^r$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^r$ 及び $\{\omega_i\}_{i=1}^r$ によって生成されるブロック写像といわれる. ヒルベルト空間の距離射影のバナッハ空間への拡張概念である, サニー準非拡大射影から生成されるブロック写像に関して次の補助定理が得られている.

補助定理 5.1 ([8]). E を回帰的で滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, $D_1, D_2, \dots, D_r$ を $\cap_{i=1}^r D_i$ が空でない E の r 個のサニー準非拡大レトラクトとする. R_i を E から D_i の上へのサニー準非拡大射影とする $(i = 1, 2, \dots, r)$. $\{\alpha_i\}_{i=1}^r \subset [0,1)$ を r 個の実数とし, $\{\omega_i\}_{i=1}^r \subset (0,1]$

を $\sum_{i=1}^{r}\omega_i = 1$ を満たす r 個の実数とする. U を $\{R_i\}_{i=1}^{r}$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^{r}$ 及び $\{\omega_i\}_{i=1}^{r}$ によって生成されるブロック写像とする. このとき, U は準非拡大写像かつ,

$$F(U) = \bigcap_{i=1}^{r} F(R_i) = \bigcap_{i=1}^{r} D_i$$

である.

補助定理 5.2 ([11]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $D_1, D_2, \ldots, D_r$ を $\cap_{i=1}^{r} D_i$ が空でない E の r 個のサニー準非拡大レトラクトとする. R_i を E から D_i の上へのサニー準非拡大射影とする $(i = 1, 2, \ldots, r)$. $\{\alpha_i\}_{i=1}^{r} \subset (0, 1)$ を r 個の実数とし, $\{\omega_i\}_{i=1}^{r} \subset (0, 1]$ を $\sum_{i=1}^{r}\omega_i = 1$ を満たす r 個の実数とする. U を $\{R_i\}_{i=1}^{r}$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^{r}$ 及び $\{\omega_i\}_{i=1}^{r}$ によって生成されるブロック写像とする. このとき,

$$F(U) = \check{F}(U).$$

である.

これらの補助定理 5.1 及び 5.2 と 定理 3.6 及び 3.7 の直接的な結果として, 制約可能性問題に関連する次の 2 つの強収束定理を得ることができる.

定理 5.3 ([11]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $D_1, D_2, \ldots, D_r$ を $\cap_{i=1}^{r} D_i$ が空でない E の r 個のサニー準非拡大レトラクトとする. R_i を E から D_i の上へのサニー準非拡大射影とする $(i = 1, 2, \ldots, r)$. $\{\alpha_i\}_{i=1}^{r} \subset (0, 1)$ を r 個の実数とし, $\{\omega_i\}_{i=1}^{r} \subset (0, 1]$ を $\sum_{i=1}^{r}\omega_i = 1$ を満たす r 個の実数とする. U を $\{R_i\}_{i=1}^{r}$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^{r}$ 及び $\{\omega_i\}_{i=1}^{r}$ によって生成されるブロック写像とする. $\{\beta_n\} \subset [0, 1)$ は $\limsup_{n\to\infty}\beta_n < 1$ を満たすものとする. このとき, $x_1 = x \in E$ とし,

$$\begin{cases} y_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) U x_n, \\ H_n = \{z \in E : V(y_n, z) \leq V(x_n, z)\}, \\ W_n = \{z \in E : \langle x - x_n, Jx_n - Jz \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = R_{H_n \cap W_n} x, \ n = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $R_{\cap_{i=1}^{r} D_i} x$ に強収束する. ただし, P_D は E から E の空でないサニー準非拡大レトラクト D の上へのサニー準非拡大射影である.

定理 5.4 ([11]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $D_1, D_2, \ldots, D_r$ を $\cap_{i=1}^{r} D_i$ が空でない E の r 個のサニー準非拡大レトラクトとする. R_i を E から D_i の上へのサニー準非拡大射影とする $(i = 1, 2, \ldots, r)$. $\{\alpha_i\}_{i=1}^{r} \subset (0, 1)$ を r 個の実数とし, $\{\omega_i\}_{i=1}^{r} \subset (0, 1]$ を $\sum_{i=1}^{r}\omega_i = 1$ を満たす r 個の実数とする. U を $\{R_i\}_{i=1}^{r}$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^{r}$ 及び $\{\omega_i\}_{i=1}^{r}$ によって生成されるブロック写像とする. $\{\beta_n\} \subset [0, 1)$ は $\limsup_{n\to\infty}\beta_n(1 - \beta_n) > 0$ を満たすものとする. このとき, $x_1 = x \in E$, $Q_1 = E$ とし,

$$\begin{cases} y_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) U x_n, \\ Q_{n+1} = \{z \in Q_n : V(y_n, z) \leq V(x_n, z)\}, \\ x_{n+1} = R_{Q_{n+1}} x, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $R_{\cap_{i=1}^{r} D_i} x$ に強収束する. ただし, P_D は E から E の空でないサニー準非拡大レトラクト D の上へのサニー準非拡大射影である.

References

[1] R. Aharoni and Y. Censor, *Block-iterative projection methods for parallel computation of solutions to convex feasibility problems*, Linear Algebra Appl. **120** (1989), 165–175.

[2] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.

[3] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student **63** (1994), 123–145.

[4] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordecht, 1990.

[5] 茨木貴徳, 「準非拡大写像に関する強収束定理とその応用」京都大学数理解析研究所講究録 **1667** (2009), 149–159.

[6] 茨木貴徳・高橋渉, 「バナッハ空間における新しい射影に関する収束定理」京都大学数理解析研究所講究録 **1484** (2006), 150–160.

[7] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.

[8] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Block iterative methods for a finite family of generalized nonexpansive mappings in Banach spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. **29** (2008), 362–375.

[9] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a finite family of nonlinear operators of firmly nonexpansive type in Banach spaces*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka Eds.), Yokohama Publishers, 2009, 49–62.

[10] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive mappings and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, Nonlinear Analysis and Optimization I: Nonlinear Analysis, Contemp. Math., **513**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 169–180.

[11] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Strong convergence theorems by hybrid methods for quilibrium problems and feasibility problems in Banach spaces*, in Fixed Point Theory and its Applications (L. J. Lin, A. Petrusel and H. K. Xu Eds.), Yokohama Publishers, 2010, 77–91.

[12] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for finite generalized nonexpansive mappings in Banach spaces*, to appear.

[13] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[14] M. Kikkawa and W. Takahashi, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the block iterative method in Banach spaces*, Int. J. Comput. Numer. Anal. Appl. **5** (2004), 59–66.

[15] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 197–209.

[16] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Block iterative methods for a finite family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2007** (2007), Article ID 21972, 18 pp.

[17] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, Fixed Point Theory Appl. **2004** (2004), 37–47.

[18] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[19] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372-379.

[20] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Programming Ser. A. **87** (2000), 189–202.

[21] A. Tada and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for a nonexpansive mapping and an equilibrium problem*, J. Optim. Theory Appl. **133** (2007), 359–370.

[22] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis – Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.

[23] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[24] W. Takahashi, Y Takeuchi and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.

[25] W. Takahashi and K. Zembayashi, *A strong convergence theorem for the equilibrium problem with a bifunction defined on the dual space of a Banach space*, in Fixed Point theory and its Applications (S. Dhompongsa, K. Goebel, W. A. Kirk, S. Plubtieng, B. Sims and S. Suantai, eds.) Yokohama Publishers, 2008, 83–93.

[26] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. **16** (1991), 1127–1138.

[27] C. Zălinescu, *On uniformly convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 344–374.